

## Corrège-type TD 05

### Variables aléatoires et lois de probabilités continues

#### Exercice 01

1.

$$P(X > 20) = 1 - \int_{10}^{20} \frac{10}{x^2} dx = 1 - \left( -\frac{10}{x} \right) \Big|_{x=10}^{x=20} = 1 - 0,5 = 0,5.$$

2. La primitive de  $f(x)$  est

$$F(x) = -\frac{10}{x} + C.$$

Pour déterminer  $C$ , on utilise le fait que  $F(x = 10) = 0$  et ainsi,

$$C = F(10) + \frac{10}{10} = 1.$$

Finalement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 1 - 10/x & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

3.

Calculons l'espérance de  $X$

$$E(X) = \int_{10}^{\infty} \frac{10}{x} dx = 10 \log(x) \Big|_{x=10}^{x=\infty} = \infty.$$

L'espérance de  $X$  est infinie.

## Exercice 02

1. Pour trouver la valeur de  $c$ , on utilise le fait que l'intégrale de la fonction de distribution  $f(x)$  sur le domaine de définition de  $x$  est égale à 1. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^3 cx dx + \int_3^6 c(6-x)dx \\ &= c \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=3} + c \left( 6x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=3}^{x=6} = \frac{9}{2}c + \frac{9}{2}c = 9c \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition se calcule en 2 étapes ; d'abord pour  $0 \leq x \leq 3$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{9} dt = \frac{x^2}{18},$$

et ensuite pour  $3 \leq x \leq 6$

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_0^3 \frac{t}{9} dt + \int_3^x \frac{6-t}{9} dt = \frac{t^2}{18} \Big|_{t=0}^{t=3} + \frac{6t - t^2/2}{9} \Big|_{t=3}^{t=x} \\ &= \frac{6x - x^2/2}{9} - 1.\end{aligned}$$

On obtient alors la fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2/18 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{9}(6x - x^2/2) - 1 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

3. Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

On calcule les 3 termes pour vérifier (ou infirmer) la dernière égalité :

$$P(A) = P(X \geq 3) = 1 - F_X(3) = \frac{1}{2},$$

puis

$$P(B) = P(1,5 \leq X \leq 4,5) = F_X(4,5) - F_X(1,5) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4},$$

et finalement

$$P(A \cap B) = P(3 \leq X \leq 4,5) = F_X(4,5) - F_X(3) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

On vérifie donc bien que  $P(A)P(B) = 3/8$ , ce qui signifie que les 2 événements sont indépendants.

## Exercice 04

1.

$$P(X > 8) = \int_8^{\infty} f(x)dx = \int_8^{\infty} \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}} dx = -e^{-\frac{x}{8}} \Big|_{x=8}^{x=\infty} = e^{-1} \simeq 0,37.$$

La probabilité que la télévision ait une durée de vie supérieure à 8 ans est d'approximativement 37 %.

2. On cherche la probabilité que la durée de vie d'une télévision soit supérieure à 10 ans en sachant qu'elle a déjà 2 ans

$$P(X > 10 | X > 2) = \frac{P(X > 10 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 10)}{P(X > 2)} = \frac{e^{-5/4}}{e^{-1/4}} = e^{-1}.$$

Le résultat est le même qu'en 1., car la loi exponentielle est *sans mémoire*.

3. Calculons l'espérance de  $X$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x}{8}e^{-\frac{x}{8}} dx = \underbrace{-xe^{-\frac{x}{8}} \Big|_{x=0}^{x=\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{8}} dx = -8e^{-\frac{x}{8}} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = 8.$$

Pour déterminer la variance de  $X$ , on va utiliser la relation  $\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . Le 2<sup>e</sup> moment s'obtient de la manière suivante

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{8}} dx = \underbrace{-x^2e^{-\frac{x}{8}} \Big|_{x=0}^{x=\infty}}_{=0} + 16 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x}{8}e^{-\frac{x}{8}} dx}_{=E(X)=8} = 2 \cdot 8^2,$$

et donc

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 \cdot 8^2 - 8^2 = 64.$$

On remarque que  $\text{var}(X) = E(X)^2$ .

## **Exercice 05**

Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , sa densité est :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Sa fonction de répartition  $F$  vaut :

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Pour tout  $s \geq 0$ , on a donc :

$$\mathbb{P}(X > s) = 1 - \mathbb{P}(X \leq s) = 1 - F(s) = e^{-\lambda s}.$$

D'autre part, par le même raisonnement qu'en question précédente, il vient pour tout couple  $(s, t)$  de réels positifs :

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s),$$

donc la loi exponentielle n'a pas de mémoire.